Παρατήρηση: (Υπενθύμιση)

i) Έστω $f: V \to V$ γραμμική. Επιλέγουμε (διατεταγμένη) βάση e του V. Τότε
- βαθμίδα(f) = $\dim \operatorname{Im} V$ = βαθμίδα $([f]_e^e)$
- ορίζουσα(f) = ορίζουσα$([f]_e^e)$
- ίχνος(f) = $tr(f) = tr([f]_e^e)$ = άθροισμα στοιχείων της κ.διαγωνίου του $[f]_e^e$

ii) Έστω $f: V \to W$ με $W \neq V$ τότε ΔΕΝ ορίζεται:
- ορίζουσα της f
- ίχνος της f

Έστω e βάση του V g βάση του W. Τότε βαθμίδα(f) = $\dim \operatorname{Im} f$ = βαθμίδα$([f]_e^g)$.

Πρόταση! Έστω $A, B \in F^{\nu\times\nu}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ▷ A, B όμοιοι
- ▷ Υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in F^{\nu\times\nu}$ με $B = PAP^{-1}$
- ▷ Υπάρχει αντιστρέψιμος $Q \in F^{\nu\times\nu}$ με $B = Q^{-1}AQ$.
- ▷ Υπάρχει αντιστρέψιμος $R \in F^{\nu\times\nu}$ με $A = RBR^{-1}$
- ▷ " " $S \in F^{\nu\times\nu}$ με $A = S^{-1}BS$
- ▷ " "

Απόδειξη: $i \Rightarrow ii$ από τον ορισμό

$(ii) \Rightarrow (iii)$ θέτουμε $Q = P^{-1}$ τότε $B = PAP^{-1} \Rightarrow B = Q^{-1}AQ$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ θέτουμε $R = Q$ τότε $B = Q^{-1}AQ \Rightarrow$
$QBQ^{-1} = Q(Q^{-1}AQ)Q^{-1} = A$.

$(iv) \Rightarrow (v)$. ομοίως $\Rightarrow A = RBR^{-1}$
$v) \Rightarrow i)$

στο $f^{\nu\times\nu}$. Η σχέση ομοιότητας είναι σχέση ισοδυναμίας

όδειξη α) Έστω $A \in f^{\nu\times\nu}$. Έχουμε

$A = I_\nu^{-1} A I_\nu \Rightarrow A$ όμοιος με A.

ι) Έστω A όμοιος με $B \Rightarrow$ Υπάρχει $P \in f^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος με $B = PAP^{-1} \Rightarrow A = QBQ^{-1}$ με ($Q = P^{-1}$) $\Rightarrow$ B όμοιος με A.

(ιιι) Έστω A όμοιος με B και B όμοιος με C. ότε υπάρχουν $P, Q \in f^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμοι με

$$\left.\begin{array}{l} B = PAP^{-1} \\ C = QBQ^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)A(QP)^{-1}$$

ρα A, C όμοιοι.

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$ και x μεταβλητή. Ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_\nu) \in F[x].$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$(1-x)(4-x) - 6 = x^2 - 5x - 2$$

▶ Ισχυρισμός: $A^2 - 5A - 2I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$

Απόδειξη $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ένα σημαντικό είναι ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο βρίσκει ρίζα του ίδιου πίνακα ίση με $\mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

Άρα $A^2 = 5A + 2I_2$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (5A + 2 \cdot I_2) = 5A^2 + 2A =$$

$$= 5(5A + 2I_2) + 2A = 27A + 10I_2$$

__Παρατήρηση__ Έστω f σώμα. Τότε ορίζεται ο "__πολυωνυμικός δακτύλιος__" $F[x]$ με στοιχεία τα πολυώνυμα $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu$ με $a_i \in F$. και πράξεις.

- πρόσθεση πολυωνύμων $(x+3)(x^2+4) = x^2+x+7$
- πολλαπλασιασμός πολυωνύμων $(x-1)(x+1) = x^2-1$
- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός. $7(x^2-7) = 7x^2-49$.

Αν $f(x) \neq 0 \in F[x]$ ορίζεται ο βαθμός $\deg f$

- $f(x) = 3x+5 \Rightarrow \deg f(x) = 1$.
- $f(x) = 5 \Rightarrow \deg f(x) = 0$
- $f(x) = x^{2016}-1 : \deg f(x) = 2016$.

__Εύκολα Βλέπουμε__: ότι αν $f(x), g(x)$ μη μηδενικά στοιχεία του $F[x]$ τότε και το γινόμενο $f(x)\cdot g(x) \neq 0$.

και $\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg(g(x))$

__Παράδειγμα__ $f(x) = x^3-1$

$g(x) = -x^3+5x$

- $f(x)+g(x) = 5x-1$. $\deg f(x) = 3$

$\deg g(x) = 3$.

$\deg f(x)+g(x) = 1$.

Παρατήρηση: Έστω $f(x) \in F[x] \neq 0$ και
$g(x) \neq 0 \in F[x]$
Υποθέτουμε ότι $f(x)+g(x) \neq 0$ τότε

i) $\deg(f(x)+g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$ (*).
ii) Αν $\deg f(x) \neq \deg g(x)$ τότε (*) → ισότητα.

Γενικότερα: Αν $\deg f(x) \neq \deg(g(x))$ ή $\deg f(x) = \deg g(x)$ αλλά το άθροισμα των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ τότε στην (*) ισχύει ισότητα.

Ορισμός

1. Έστω $f(x) \in F[x]$. Το $f(x)$ λέγεται ΣΤΑΘΕΡΟ αν υπάρχει $c \in F$ με $f(x) = c$.
 - $f(x) = 5+x$: όχι σταθερό

2. Έστω $f(x) \in F[x]$ λέγεται ΜΟΝΙΚΟ αν $f(x) \neq 0$ και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ίσος με 1_F. [π.χ: $f(x) = x^3 - 1$ → ΜΟΝΙΚΟ]

3. Έστω $f(x), g(x) \in F[x]$. Τα $f(x), g(x)$ λέγονται συντροφικά, αν υπάρχει $c \neq 0 \in F[x]$. ΣΤΑΘΕΡΟ με $g(x) = c f(x)$. Τότε ισχύει

$$\boxed{f(x) = c^{-1} g(x)}$$

π.χ. Το $x-3$ και το $3x-9$ είναι ΣΥΝΤΡΟΦΙΚΑ.

Ορισμός

Έστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in F[x]$ (δηλ. $a_i \in F \ \forall i$).

Έστω $b \in F$ τότε θέτουμε $f(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 \in F$

Το b λέγεται **ΡΙΖΑ** του $f(x)$ αν $f(b) = 0_F$.

Έστω $B \in F^{\nu \times \nu}$ ορίζουμε $f(B) \in F^{\nu \times \nu}$ ως εξής:

$$f(B) = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_0 I_\nu$$

Παράδειγμα: $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$f(x) = x^2 - 5$

$$f(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 5I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Ορισμός

Έστω $\varphi(x), \lambda(x) \in F[x]$ με $\varphi(x) \neq 0$. Λέμε ότι το $\varphi(x)$ διαιρεί το $\lambda(x)$ στο $F[x]$ αν υπάρχει $\pi(x) \in F[x]$ ώστε

$$\lambda(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x).$$

Τότε το $\pi(x)$ είναι μοναδικό.

Παρατήρηση: Αν το $\varphi(x)$ διαιρεί το $\lambda(x)$ στο $F(x)$ με $\varphi(x), \lambda(x)$ μη μηδενικά τότε $n\,1 \Rightarrow$

$$\deg(\lambda(x)) = \deg\varphi(x) + \deg\pi(x) \geq \deg\varphi(x).$$

Ορισμός

Έστω $p(x) \in F[x]$. Το $p(x)$ λέγεται ΑΝΑΓΩΓΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ αν το $P(x)$:

- ΔΕΝ είναι σταθερό
- Οι μοναδικοί διαιρέτες του $P(x)$ στο $F[x]$ είναι τα (μη-μηδενικά) σταθερά πολυώνυμα και τα πολυώνυμα $c \cdot P(x)$ $c \in F - \{0\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\varphi(x) \in F[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο. Τότε το $\varphi(x)$ γράφεται ως γινόμενο μιας σταθεράς $c \in F - \{0\}$ και αναγώγων, μονικών αναγώγων πολυωνύμων κατά ΜΟΝΑΔΙΚΟ τρόπο. (αν αγνοήσουμε την σειρά των παραγόντων)

Π.χ. Στο $\mathbb{C}[x]$: $2x^2+2 = 2(x^2+1) = 2(x-i)(x+i)$
Που είναι ανάγωγα στο $\mathbb{C}[x]$ ως πολυώνυμα πρώτου βαθμού

στο R[x] $2x^2+2 = 2(x^2+1)$ ← Ανάγωγο στο R[x].

ΘΕΩΡΗΜΑ

1. Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ΑΝΑΓΩΓΟ τότε $\deg f(x) = 1$.
2. Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ΑΝΑΓΩΓΟ τότε :
   - $\deg f(x) = 1$ ή
   - $\deg f(x) = 2$ και ΔΕΝ έχει πραγματικές ρίζες.

(Διακρίνουσα <0).

- Το $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ → ΑΝΑΓΩΓΟ!

Παρατήρηση

Το Θεώρημα 1 είναι πολύ βαθύ και είναι ισοδύναμο με το Θεμελ. Θεώρημα της Άλγεβρας: Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ μη σταθερό.
Τότε $f(x)$ έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$